НЕЛИНЕЙНЫЙ МАССОПЕРЕНОС С ОБРАТИМОЙ АДСОРБЦИЕЙ НА ПОЛУПРОНИЦАЕМЫХ МЕМБРАНАХ В ПРОТОЧНЫХ ФИЛЬТРАХ

Поляков Ю.С.*, Казенин Д.А.**

*Технологический институт Нью-Джерси, Ньюарк, США, yuriypolyakov@lycos.com
**Московский государственный университет инженерной экологии

Нелинейный массоперенос с обратимой адсорбцией на наружной поверхности мембран в проточных ультра- и микрофильтрационных половолоконных фильтрах, производящих два потока очищенной жидкости – пермеат и фильтрат, может быть описан с помощью системы уравнений и начального и граничных условий, сформулированных в [1]. Существенным отличием этой задачи от задачи, описывающей работу тупикового фильтра [1], является другой закон изменения скорости потока жидкости по глубине фильтра, а также то, что работа проточного фильтра организована так, что он обеспечивает постоянную производительность при постоянном трансмембранном давлении [2, 3]. Последнее достигается тем, что падение потока пермеата компенсируется соответствующим увеличением потока фильтрата.

Для случая проточного половолоконного фильтра исходная система уравнений для нахождения удельной массовой концентрации осадка с соответствующими начальным и граничными условиями приобретает вид [1 - 3]:

$$\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial t^2}+(\alpha+s\beta)\frac{\partial \Gamma}{\partial t}+sV_0\frac{\partial}{\partial z}\left(\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t}+\alpha\Gamma\right)\times\left[\frac{w_0}{sV_0}-\int_0^z \frac{1}{1+\chi_1\Gamma}dz\right]\right)=0 \qquad (1)$$

$$\Gamma=\beta c_0\left(1-\exp[-\alpha\, t]\right)/\alpha, \qquad \text{при } z=0,\ t>0; \qquad (2)$$

$$\Gamma=0,\ \partial\Gamma/\partial t=0 \qquad \text{при } t=0,\ z>0. \qquad (3)$$

Здесь $\chi_1=r_c/R_m$, c - концентрация коллоидных частиц, кг/м^3; t - время, с; w_0 - скорость потока исходной смеси, м/с; z - расстояние от входа в фильтр, м; s - удельная поверхность фильтра, 1/с; Γ - удельная массовая концентрация осадка, кг/м^2; β, α – коэффициенты адсорбции и пептизации, м/с, 1/с; R_m – гидравлическое сопротивление мембраны, м; r_c – удельное гидравлическое сопротивление осадка, м^3/кг, V_0 – начальная скорость потока пермеата, м/с.

Искомыми зависимостями являются

- концентрация коллоидных частиц c, задаваемая уравнением
$$c=\frac{1}{\beta}\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial t}+\alpha\Gamma\right), \qquad (4)$$
- усредненная по глубине скорость пермеата
$$\frac{V}{V_0}=\frac{1}{d}\int_0^d \frac{dz}{1+\chi_1\Gamma}, \qquad (5)$$
- концентрация коллоидных частиц в осветленном продукте c_{pf} (пермеат плюс фильтрат) и значение задерживающей способности фильтра R для непрерывного режима работы, при котором осветленный продукт, отводимый из аппарата, непрерывно подается для использования в другом процессе:

$$c_{pf} = \frac{c_0 w_0 - s \cdot \int_0^d \frac{\partial \Gamma}{\partial t} dz - \int_0^d \frac{\partial c}{\partial t} dz}{w_0}, \tag{6}$$

$$R = 1 - \frac{c_{pf}}{c_0}, \tag{7}$$

- концентрация коллоидных частиц в осветленном продукте c'_{pf} и значение задерживающей способности фильтра R' для периодического режима работы, при котором осветленный продукт собирается в отдельную емкость до тех пор, пока не будет переработана вся порция исходной суспензии:

$$c'_{pf} = \frac{c_0 w_0 t - s \cdot \int_0^d \Gamma dz - \int_0^d c\, dz}{w_0 t}, \tag{8}$$

$$R' = 1 - \frac{c'_{pf}}{c_0}. \tag{9}$$

Здесь d – глубина фильтра, м; c_0 - концентрация коллоидных частиц в исходной смеси, кг/м^3.

После перехода к безразмерному виду задача (1) - (3) записывается как

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \tau^2} + (N_\alpha + 1)\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} + \frac{1}{\xi N_\beta} \times \frac{\partial}{\partial Z}\left(\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} + N_\alpha \gamma \right) \times \left[1 - \xi \int_0^Z \frac{1}{1 + N_\chi \gamma} dZ \right] \right) = 0, \tag{10}$$

$$\gamma = \left(1 - \exp[-N_\alpha \tau]\right) / N_\alpha \qquad \text{при } Z = 0,\ \tau > 0; \tag{11}$$

$$\gamma = 0,\ \partial\gamma / \partial\tau = 0, \qquad \text{при } \tau = 0,\ Z > 0, \tag{12}$$

где $\tau = s\beta t,\ Z = \frac{z}{d},\ \gamma = \frac{s}{c_0}\Gamma,\ N_\chi = \chi_1 \frac{c_0}{s},\ N_\beta = \frac{\beta}{V_0},\ N_\alpha = \frac{\alpha}{s\beta},\ \xi = \frac{d\, sV_0}{w_0}$.

Нахождение точного аналитического решения этой задачи практически невозможно. Ее численное решение "в лоб" также представляет практически неосуществимую задачу из-за наличия интеграла в третьем члене. Поэтому, как и в [1], нами было предложено трансформировать это интегродифференциальное уравнение к уравнению в частных производных, содержащему одну функцию двух независимых переменных.

Численное решение

Введением новой функции $v = \int_0^Z \frac{dZ}{1 + N_\chi \gamma}$, соответствующей потоку пермеата из области фильтра, лежащей между входом фильтра и поверхностью с координатой *Z*, задача сводится к решению уравнения:

$$\begin{aligned} & -2\xi N_\beta \left(\frac{\partial^2 v}{\partial Z\, \partial \tau} \right)^2 + \xi N_\beta \frac{\partial^3 v}{\partial Z\, \partial \tau^2} \frac{\partial v}{\partial Z} + \xi N_\beta N_\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial Z\, \partial \tau} \frac{\partial v}{\partial Z} + \xi N_\beta \frac{\partial^2 v}{\partial Z\, \partial \tau} \frac{\partial v}{\partial Z} - 2 \frac{\partial^2 v}{\partial Z\, \partial \tau} \frac{\partial^2 v}{\partial Z^2} + \\ & + 2\xi v \frac{\partial^2 v}{\partial Z\, \partial \tau} \frac{\partial^2 v}{\partial Z^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial Z^2\, \partial \tau} \frac{\partial v}{\partial Z} - \xi v \frac{\partial^3 v}{\partial Z^2\, \partial \tau} \frac{\partial v}{\partial Z} + N_\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial Z^2} \frac{\partial v}{\partial Z} - N_\alpha \xi v \frac{\partial^2 v}{\partial Z^2} \frac{\partial v}{\partial Z} - \\ & - \xi \left(\frac{\partial v}{\partial Z} \right)^2 \frac{\partial^2 v}{\partial Z\, \partial \tau} + \xi N_\alpha \left(\frac{\partial v}{\partial Z} \right)^3 - \xi N_\alpha \left(\frac{\partial v}{\partial Z} \right)^4 = 0 \end{aligned} \tag{13}$$

с начальными и граничными условиями

$$v(0, Z) = Z, \quad \frac{\partial v(0, Z)}{\partial \tau} = 0, \quad \frac{\partial v(\tau, 0)}{\partial Z} = \frac{1}{1 + N_\chi \left(1 - \exp[-N_\alpha \tau]\right) / N_\alpha}, \quad v(\tau, 0) = 0. \tag{14}$$

Её решение может быть получено с помощью неявного метода центральных конечных разностей, включенного в некоторые современные математические пакеты, например, Maple v.9.

Искомая зависимость усредненного безразмерного потока фильтрата V/V_0 представляет собой функцию v в точке $Z=1$.

Приближенное решение

Аналогично задаче, исследованной в [1], задача (10) - (12) имеет аналитическое решение в случае, когда скорость пермеата, задаваемая уравнением

$$V_p = \frac{V_0}{1+\chi_1 \Gamma}, \tag{15}$$

остается постоянной величиной. Этот факт может быть использован для получения приближенного решения данной задачи.

Если нашей целью является нахождение функции $\Gamma(t,z)$ путем решения (10) – (12) с последующим ее использованием для определения усредненной скорости пермеата с помощью (5), концентрации взвешенных частиц в фильтрате и задерживающей способности фильтра, то возможно применение итеративной процедуры, предложенной в [2].

Основная идея этого метода состоит в усреднении скорости пермеата по времени и глубине фильтра на каждой итерации. В качестве первого постоянного значения проницаемости мембран будем использовать проницаемость по чистой воде. С помощью этой проницаемости мы найдем профиль $\Gamma(t,z)$, который используем для нахождения нового усредненного значения проницаемости. С помощью этого постоянного значения проницаемости найдем новый профиль удельной массовой концентрации осадка, новое усредненное значение проницаемости и т.д. до тех пор, пока новое и предыдущее усредненные значения проницаемости практически не совпадут. Подробное описание итеративного алгоритма этого приближенного решения представлено ниже:

АЛГОРИТМ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ С УСРЕДНЕНИЕМ

Пусть T_w - заданное время работы фильтра, $V^*_{(i)}$ - это усредненное значение скорости пермеата, V_{av}, на *i*-той итерации, ε_V – заданная наибольшая относительная разница между двумя соседними значениями V_{av}. Тогда алгоритм может быть записан в следующем виде.

1. $t := T_w, V^*_{(0)} := V_0$ (задаться временем *t* и начальным значением для V_{av}).

2. Если $i>0$ и $\dfrac{V^*_{(i+1)} - V^*_{(i)}}{V^*_{(i)}} < \varepsilon_V$, закончить программу (выполнять последующие шаги, пока относительная разница между новым и предыдущим значениями V_{av} не станет меньше ε_V).

3. Вычислить $V^*_{(i+1)} = \dfrac{1}{t\,d}\displaystyle\int_0^t\int_0^d \frac{V_0}{1+\chi_1 \Gamma^*_{(i)}(z,t_1)}\,dz\,dt_1$, используя Γ, определенную при $V^*_{(i)}$.

5. Если $i>1$, то $V^*_{(i+1)} := \dfrac{V^*_{(i+1)} + V^*_{(i)}}{2}$ (ускоритель сходимости).

6. Вернуться к шагу 2.

Способность такого приближенного решения хорошо описывать процесс разделения определяется видом уравнения (10), в частности выражением в квадратных скобках в третьем члене. Использование усредненной постоянной проницаемости в интеграле не приводит к большой ошибке при вычислении выражения в квадратных скобках, так как достаточно быстро после начала процесса величина потока в межволоконном пространстве диктуется, в основном, возрастающим потоком фильтрата, а влияние уменьшающегося потока пермеата ослабевает. К тому же, как показали наши оценки, реальный профиль отсоса по координате z достаточно близок к линейному.

В случае постоянной проницаемости задача (10) - (12) преобразуется к следующему виду

$$\frac{\partial^2 \gamma}{\partial \tau^2} + \left(N_\alpha + 1\right)\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} + \frac{1}{\xi_{av} N'_\beta} \times \frac{\partial}{\partial Z}\left(\left(\frac{\partial \gamma}{\partial \tau} + N_\alpha \gamma\right) \times \left[1 - \xi_{av} Z\right]\right) = 0, \tag{16}$$

$$\gamma = \left(1 - \exp\left[-N_\alpha \tau\right]\right)/N_\alpha \qquad \text{при } Z = 0,\ \tau > 0; \tag{17}$$

$$\gamma = 0,\ \partial \gamma / \partial \tau = 0, \qquad \text{при } \tau = 0,\ Z > 0. \tag{18}$$

где $\xi_{av} = \frac{s V_{av} d}{w_0}$, $N'_\beta = \frac{\beta}{V_{av}}$.

Аналогично [2], с помощью преобразования Лапласа по времени получаем следующее решение

$$\gamma = 0 \quad \text{при } \tau < \xi_{av} N'_\beta \bar{X}. \tag{19}$$

$$\gamma = \frac{\exp\left[-N_\alpha \tau - \xi_{av} N'_\beta \bar{X} + N_\alpha \xi_{av} N'_\beta \bar{X}\right]}{N_\alpha \left(1 - \xi_{av}\right)^{\bar{X}}} \times \sum_{m=1}^{\infty} I_m\left[2\sqrt{N_\alpha \xi_{av} N'_\beta \bar{X}\left(\tau - \xi_{av} N'_\beta \bar{X}\right)}\right]\left(\frac{N_\alpha\left(\tau - \xi_{av} N'_\beta \bar{X}\right)}{\xi_{av} N'_\beta \bar{X}}\right)^{\frac{m}{2}} \quad \text{при } \tau > \xi_{av} N'_\beta \bar{X}. \tag{20}$$

где $x = -\frac{d}{\xi_{av}} \ln\left(1 - \xi_{av} \frac{z}{d}\right)$, $\bar{X} = \frac{x}{d}$.

Асимптотические решения

Получим асимптотические решения при $z \to 0$ и $t \to \infty$.

При $z \to 0$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \beta c_0 - \alpha \Gamma, \tag{21}$$

$$\Gamma(0) = 0. \tag{22}$$

Решение (21) с учетом (22) имеет вид

$$\Gamma = \frac{\beta c_0}{\alpha}\left(1 - \exp\left[-\alpha t\right]\right). \tag{23}$$

При $t \to \infty$ (стационарная задача)

$$w c = w_0 c_0, \tag{24}$$

$$\beta c = \alpha \Gamma. \tag{25}$$

Задача (24)-(25) сводится к виду

$$\int_0^z \frac{dy}{1 + \chi_1 \Gamma(y)} = \frac{w_0}{s V_0}\left(1 - \frac{\beta}{\alpha \Gamma} c_0\right), \tag{26}$$

Так как Γ – это положительная непрерывно дифференцируемая функция, мы можем продифференцировать уравнение по z:

$$dz = \frac{w_0 c_0 \beta}{s V_0 \alpha} \frac{1+\chi_1 \Gamma}{\Gamma^2} d\Gamma, \tag{27}$$

$$\Gamma(0) = \Gamma_0, \tag{28}$$

где $\Gamma_0 = \beta c_0 / \alpha$.

Решение задачи (27)-(28) записывается в виде выражения:

$$z = \frac{w_0 c_0 \beta}{s V_0 \alpha} \left(-\frac{1}{\Gamma} + \frac{1}{\Gamma_0} + \chi_1 \ln\left(\frac{\Gamma}{\Gamma_0}\right) \right). \tag{29}$$

Еще один асимптотический случай, представляющий интерес, – это решение задачи (10) - (12) при малой проницаемости (фактически задача со сплошными коллекторами), которое с помощью простых преобразований может быть получено из выражений (19)-(20). Используя $\xi_{av} = 0$ и $\bar{X} = Z$, получаем:

$$\gamma = 0 \quad \text{при } \tau < N_\beta Z. \tag{30}$$

$$\gamma = \frac{\exp\left[-N_\alpha \tau - N''_\beta Z + N_\alpha N''_\beta Z\right]}{N_\alpha} \times \sum_{m=1}^{\infty} I_m \left[2\sqrt{N_\alpha N''_\beta Z\left(\tau - N_\beta Z\right)}\right] \left(\frac{N_\alpha\left(\tau - N''_\beta Z\right)}{N''_\beta Z}\right)^{\frac{m}{2}} \quad \text{при } \tau > N_\beta Z. \tag{31}$$

где $N''_\beta = s\beta d / w_0$. .

Проведенные расчеты показали, что приближенное аналитическое решение, использующее простую итерационную процедуру, обеспечивает высокую точность расчета производительности и задерживающей способности проточного фильтра: погрешность по сравнению с численным решением не превышает нескольких процентов [3]. С помощью приближенного решения можно проводить оптимизацию режимных параметров процесса и легко определять эмпирические коэффициенты, необходимые для расчета реальных мембранных установок.

1. Поляков Ю.С., Казенин Д.А. Нелинейный массоперенос с обратимой адсорбцией на полупроницаемых мембранах в тупиковых фильтрах // ММТТ-18. 2005.
2. Поляков Ю.С., Казенин Д.А. Разработка мембранных половолоконных фильтров нового типа для создания замкнутых по воде контуров на лакокрасочных производствах, тепловых электростанциях и авторемонтных предприятиях // Экологические проблемы индустриальных мегаполисов: Материалы I международной научно-практической конференции. Т. 1. 2004. Донецк: Лебедь. С. 221.
3. Поляков Ю.С. Ультра– и микрофильтрация в половолоконных аппаратах с образованием осадка на поверхности мембран. Диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук. - Москва: МГУИЭ, 2004.