МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОСТЕПЕННОГО ЗАКУПОРИВАНИЯ ПОР В ПОЛУПРОНИЦАЕМЫХ МЕМБРАНАХ

Поляков Ю.С.

Московский государственный университет инженерной экологии

Процесс постепенного закупоривания пор ультрафильтрационных и микрофильтрационных мембран оказывает существенное влияние на производительность мембранных аппаратов [1]. Использование этого процесса отдельно или совместно с процессом фильтрования через слой осадка, образующегося на поверхности мембран, позволяет добиться увеличения производительности мембранного оборудования [2].

Как правило, этот процесс описывают с помощью традиционной простой модели постепенного закупоривания, в которой количество (масса) частиц, осажденных на внутренней поверхности пор мембраны, прямо пропорционально объему полученного фильтрата [1]. К сожалению, эта модель предполагает равномерное осаждение частиц по длине поры мембраны, что противоречит реальной физической картине процесса, происходящего в поре. Сужение устья поры приводит к тому, что пора прекращает доступ частиц в свое поровое пространство и процесс постепенного закупоривания переходит в процесс фильтрования через слой осадка, образующегося на поверхности мембраны [2]. Так как профиль осадка внутри поры неравномерный – толщина осадка убывает от устья до выхода из поры, использование традиционный модели приводит к неправильной оценке момента времени, когда уменьшающийся диаметр устья перекрывает доступ частиц в пору, и к большим ошибкам в оценке объемов произведенного фильтрата.

Попытки сформулировать более полную картину осаждения частиц внутри поры с использованием модели траекторий частиц под действием вязкостных, поверхностных и электрокинетических сил, позволили провести расчеты лишь для одиночной частицы. При этом эти модели довольно сложны с математической точки зрения и мало применимы к практическим расчетам ввиду необходимости знания значений и зависимостей ряда физико-химических параметров, как правило, неизвестных для реальных суспензий.

В [2] сделана попытка учесть неравномерность профиля осадка по длине мембраны за счет введения входного участка поры постоянной длины, на котором происходит осаждение частиц, тогда как на остальной поверхности поры осадкообразование отсутствует. Хотя этот подход значительно расширил возможность применения традиционного подхода к постепенному закупориванию, его точность определяется тем, насколько "ступенчатый" профиль может аппроксимировать реальный постепенно снижающийся профиль концентрации частиц, захваченных внутренней поверхностью поры.

Для того чтобы ответить на этот вопрос, надо сформулировать и решить сложную нелинейную систему уравнений, описывающую переменный по времени профиль захваченных частиц внутри поры. Вместо прямого решения такой системы можно ввести упрощения, которые позволят получить быстрое решение современными математическими методами. С этой целью в данной работе предлагается модель пакета колец с ячейками осаждения, базисным допущением которой остается традиционный принцип, что количество (масса) частиц, осажденных на внутренней поверхности пор мембраны, прямо пропорционально объему полученного фильтрата и то, что изменение локальной концентрации захваченных частиц прямо пропорционально произведению скорости фильтрационного потока на локальную концентрацию.

В этой модели внутреннее пространство поры заменяется на пакет колец, каждое из которых имеет толщину, равную диаметру частицы. Наружная часть кольца (между внутренним и наружным диаметрами) состоит из ячеек с гидравлическим диаметром, равным диаметру частицы. Считаем, что эти ячейки не могут пропускать частицы. Если частица подходит к ячейке, то она закупоривает ее устье, при этом снижая свободное поперечное сечение поры на значение, соответствующее поперечному сечению ячейки. Частицы, которые не были захвачены этими ячейками, переносятся потоком жидкости через центральное отверстие к следующему кольцу. Мы принимаем, что между кольцами существует камера идеального перемешивания с пренебрежимо малой толщиной, вследствие чего перемешанная в радиальном направлении суспензия подходит ко второму кольцу, где происходит захват следующей порции частиц на устьях ячеек. И так далее до выхода из поры.

Такой подход позволяет смоделировать процесс осаждения частиц на внутреннюю поверхность поры как функцию времени и расстояния вдоль оси поры не используя сложные механизмы захвата частиц, а базируясь лишь на простейших допущениях традиционной модели постепенного закупоривания. При этом мы можем исследовать такие факторы, как возможность образования одного или нескольких слоев частиц на внутренней поверхности мембран путем соответствующего изменения количества ячеек в кольце.

Так как эта модель имеет много общего с известной стохастической моделью фильтрации на основе полного закупоривания пор (size exclusion) [3], применяемой для описания объемной фильтрации через пористые среды, то легко показать, что процесс образования осадка в "окольцованной" поре может быть описан известной системой уравнений материального баланса:

$$\frac{\partial\left[\gamma(\sigma)c\right]}{\partial T}+\frac{\partial\left[\alpha(\sigma)c\right]}{\partial X}=-\frac{\partial\sigma}{\partial T}, \tag{1}$$

$$\frac{\partial\sigma}{\partial T}=\lambda\left[1-\alpha(\sigma)\right]c. \tag{2}$$

с начальными и граничными условиями

$$T=0:\ c(X,0)=0,\ \sigma(X,0)=0; \tag{3}$$

$$X=0:\ c(0,T)=c_0. \tag{4}$$

Здесь

$$\lambda=\lambda' L,\ X=\frac{x}{L}, T=\frac{1}{L}\int_0^t U(t')dt',$$

c – концентрация взвешенных частиц, σ – концентрация захваченных частиц, λ' – коэффициент фильтрации, γ – коэффициент доступности пор, U – скорость фильтрационного потока, t – время, x – продольное расстояние, L – длина поры, и α – коэффициент снижения фильтрационного потока. Простые выражения для коэффициентов доступности пор и снижения фильтрационного потока как функции

σ могут быть найдены по аналогии с [3]. Нелинейная система уравнений (1)-(4) может быть численно решена конечно-разностным методом Кранка-Николсона.

1. Zeman L.J., Zydney A.L. Microfiltration and Ultrafiltration: Principles and Applications. N.–Y.: Marcel Dekker, 1996.
2. Поляков С.В., Максимов Е.Д., Поляков В.С. ТОХТ, 1995, Т. 29, № 4.
3. Santos A., Bedrikovetsky P. Computation and Applied Mathematics, 2004, V. 23, №.2-3.